Άσκηση Φυλ. 36.

36. Να γραφεί το διάνυσμα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης υλικού σημείου σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες. Να υπολογιστεί η εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης στην τροχιά υλικού σημείου με τη βοήθεια των κυλινδρικών συντεταγμένων.

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες το διάνυσμα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης γράφονται:

$$\bar{u} = \dot{r}\,\bar{r}_0 + r\dot{\theta}\,\bar{\theta}_0 + \dot{z}\,\bar{z}_0 = u_r\bar{r}_0 + u_\theta\bar{\theta}_0 + u_z\bar{z}_0$$

κ'

$$\bar{\alpha} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\bar{r}_0 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\bar{\theta}_0 + \ddot{z}\,\bar{z}_0 = \alpha_r\bar{r}_0 + \alpha_\theta\bar{\theta}_0 + \alpha_z\bar{z}_0$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες το διάνυσμα της ταχύτητας κ' της επιτάχυνσης γράφονται:

$$\bar{u} = \dot{r}\,\bar{e}_r + r\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\bar{e}_\phi = u_r\bar{e}_r + u_\theta\bar{e}_\theta + u_\phi\bar{e}_\phi$$

κ'

$$\bar{\alpha} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\,\bar{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\,\bar{e}_\theta +$$

$$+ (2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\,\bar{e}_\phi = \alpha_r\bar{e}_r + \alpha_\theta\bar{e}_\theta + \alpha_\phi\bar{e}_\phi$$

Η διανυσματική μονάδα στη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς είναι:

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \frac{\dot{r}\,\bar{r}_0 + r\dot{\theta}\,\bar{\theta}_0 + \dot{z}\,\bar{z}_0}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}}$$

Άρα η εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης σε κυλινδρικές θα είναι:

$$\bar{\alpha}\cdot\bar{\varepsilon}_0 = \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\bar{r}_0 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\bar{\theta}_0 + \ddot{z}\,\bar{z}_0\right]\cdot\frac{\dot{r}\,\bar{r}_0 + r\dot{\theta}\,\bar{\theta}_0 + \dot{z}\,\bar{z}_0}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}} =$$

$$= \frac{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\dot{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,r\dot{\theta} + \dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}}$$

Ασκηση Φυλ. 37

37. Υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο Oxy έτσι ώστε οι συνιστώσες της θέσης του να πληρούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \alpha + \beta \cos t, \\ y(t) &= \gamma + \delta \sin t, \end{aligned}\right\}$$

με α, β, γ, δ σταθερές. (i) Να βρεθεί η τροχιά του υλικού σημείου ως $y = y(x)$ και (ii) να παρασταθεί γραφικά όταν $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$ και $\delta = 3$ (*).

i) $$\left.\begin{aligned} x(t) &= \alpha + \beta \cos t \\ y(t) &= \gamma + \delta \sin t \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\beta,\delta \neq 0} \left\{\begin{aligned} \frac{x-\alpha}{\beta} &= \cos t \\ \frac{y-\gamma}{\delta} &= \sin t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^2}{\beta^2} + \frac{(y-\gamma)^2}{\delta^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^2}{\beta^2} + \frac{(y-\gamma)^2}{\delta^2} = 1$$, είναι έλλειψη κέντρου (α, γ)

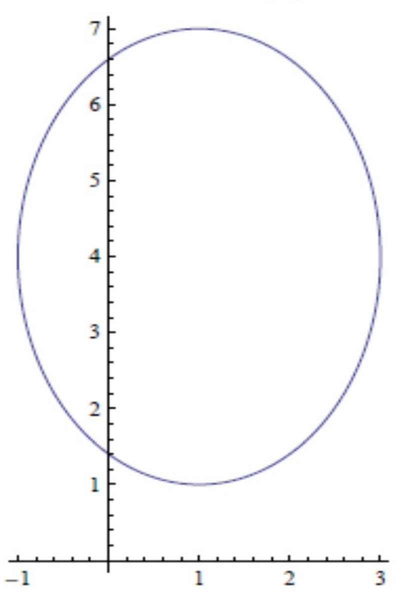
ii) Για $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$ κ' $\delta = 3$ έχουμε την:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$, έλλειψη κέντρου $(1,4)$

Για να παρασταθεί:

```
In[1]:= ParametricPlot[{1 + 2 Cos[t], 4 + 3 Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi}]
```

Out[1]=



Άσκηση Φυλ. 38

38. Η κίνηση υλικού σημείου δίνεται από την τομή των επιφανειών:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2\sin\frac{\pi x}{4}, \\ z &= 2\cos\frac{\pi x}{4}. \end{aligned}\right\}$$

(*i*) Να βρεθεί η απόσταση, S, που διανύει το υλικό σημείο μεταξύ των σημείων $(0,0,2)$ και $(1,\sqrt{2},\sqrt{2})$. (*ii*) Να παρασταθεί γραφικά η κίνηση του υλικού σημείου από $x=0$ έως $x=10$ (*).

i) Η κίνηση του υλικού σημείου δίνεται από την τομή των επιφανειών:

$$\left\{\begin{aligned} y &= 2\sin\frac{\pi x}{4} \\ z &= 2\cos\frac{\pi x}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} dy &= \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx \\ dz &= -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx \end{aligned}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + \frac{\pi^2}{4}\left[\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]dx^2$$

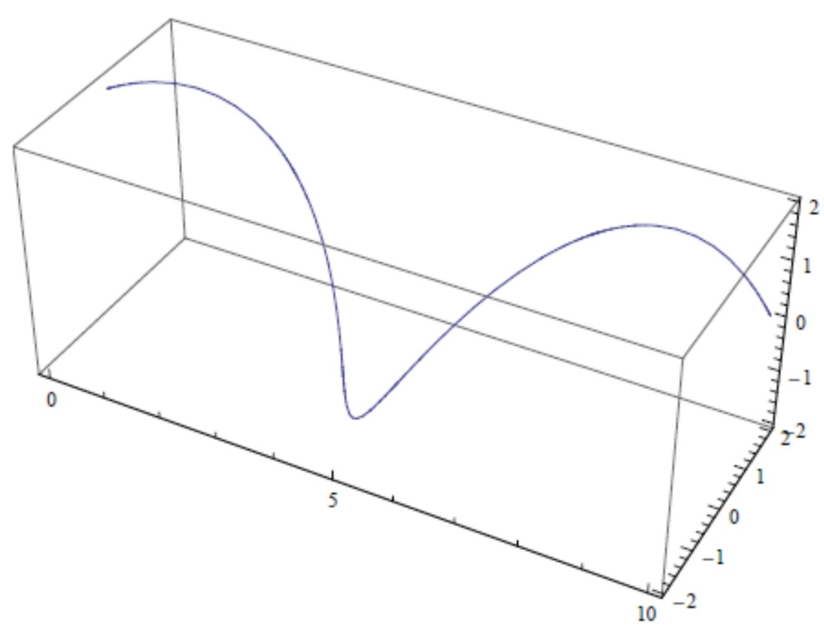
$$\Rightarrow ds^2 = dx^2 + \frac{\pi^2}{4}dx^2 \Rightarrow ds = \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}\,dx \Rightarrow \int_{s_0}^{s_1} ds =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}\,dx \Rightarrow S = \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}$$

(ii) Για να παρασταθεί γραφικά:

```
In[3]:= ParametricPlot3D[{x, 2 Sin[Pi x / 4], 2 Cos[Pi x / 4]}, {x, 0, 10}]
```

Out[3]=



Άσκηση Φυλ. 39

39. Η γραφική παράσταση του μέτρου, u, της ταχύτητας με την απόσταση, S, υλικού σημείου, δίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 15). Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση του μέτρου της επιτάχυνσης, a, με την απόσταση, S, και να υπολογιστεί ο χρόνος που χρειάζεται το υλικό σημείο να φτάσει στην απόσταση $S = 400\ m$.

- Για τον υπολογισμό του μέτρου της επιτάχυνσης, $|\vec{\alpha}|$ έχουμε ότι:

(i) $0 \leq S < 200 (m)$: $|\vec{u}| = (0.2S + 10)\ (m/s)$

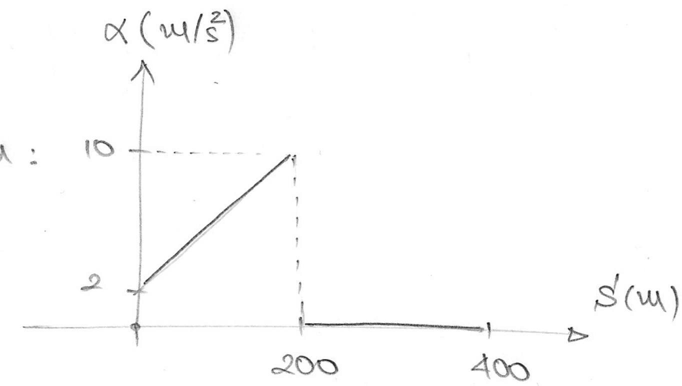
επίσης $|\vec{\alpha}| dS = |\bar{u}| d|\bar{u}|$ (απ' εδώ και πέρα θα γράφουμε $|\bar{u}| = u$ κ' $|\bar{\alpha}| = \alpha$)

Δηλ., $\alpha = u\dfrac{du}{dS} = (0.2S+10)\dfrac{d}{dS}(0.2S+10) = 0.04S + 2$

(ii) $200 < S \leq 400\ (m)$: $u = 50\ (m/s)$

οπότε $\alpha = u\dfrac{du}{dS} = 0$

Άρα, η γραφική παράσταση είναι:



- Ο χρόνος που χρειάζεται το υλικό σημείο για να φτάσει σε $S = 400\ m$.

Χρησιμοποιώντας την γραφική του μέτρου της ταχύτητας με την απόσταση έχουμε ότι:

(i) $0 \leq S < 200 (m)$: $u = (0.2S + 10)\ (m/s)$, $dt = \dfrac{dS}{u} = \dfrac{dS}{0.2S+10}$

$$\int_0^t dt = \int_0^S \frac{dS}{0.2S+10} \Rightarrow t = 5\ln(0.2S+10) - 5\ln 10\ (s)$$

Για $S = 200m$, $t = 5\ln[0.2(200)+10] - 5\ln 10 = 8.05\ s$ (αρχική συνθήκη για το επόμενο)

(ii) $200 < S \leq 400\ (m)$: $u = 50\ m/s$, $dt = \dfrac{dS}{u}$

$$\int_{8.05}^t dt = \int_{200}^S \frac{dS}{50} \Rightarrow t - 8.05 = \frac{S}{50} - 4 \Rightarrow t = \frac{S}{50} - 4.05\ (s)$$

οπότε για $S = 400m$: $t = 12\ s$

Άσκηση φυλ. 40

40. Όταν ο σκιέρ (υλικό σημείο) φτάνει στο σημείο A πάνω στη παραβολική τροχιά του σχήματος, $y(x) = x^2/20$, (Σχήμα 16) έχει ταχύτητα μέτρου 6 m/s και αυξάνεται κατά 2 m/s^2. Να προσδιοριστεί η κατεύθυνση της ταχύτητας του υλικού σημείου καθώς και η κατεύθυνση και το μέτρο της επιτάχυνσης του υλικού σημείου. Η ακτίνα καμπυλότητας δίνεται από τη σχέση: $\rho(x) = \sqrt{(1+y'^2(x))^3}/y''(x)$.

Η καμπύλη πάνω στην οποία κινείται ο σκιέρ είναι: $y(x) = \frac{x^2}{20}$,
οπότε $y'(x) = \frac{x}{10}$ & $y''(x) = \frac{1}{10}$

Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας είναι: $\frac{d}{dt}|\bar{u}| = 2$

$\tan\theta = y'(x_A) = y'(10) = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

Άρα η κατεύθυνση της ταχύτητας του σκιέρ στο σημείο A είναι η
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{x}_0 + \bar{y}_0)$.

Η ακτίνα καμπυλότητας δίνεται από τη σχέση:

$$\rho(x) = \frac{\sqrt{(1+y'(x)^2)^3}}{y''(x)}, \text{ για } x_A = 10\,m: \rho(x_A) = \frac{\sqrt{(1+y'(10)^2)^3}}{y''(10)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(x_A) = 20\sqrt{2}$$

Η επιτρόχιος επιτάχυνση είναι $\bar{\alpha}_{επιτρ.} = \frac{d}{dt}|\bar{u}|\,\bar{\varepsilon}_0 = \sqrt{2}\,\bar{x}_0 + \sqrt{2}\,\bar{y}_0$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι: $\vec{\alpha}_{κεντρ.} = \frac{|\bar{u}(x_A)|^2}{\rho(x_A)}\bar{\eta}_0 = \frac{9\sqrt{2}}{10}\bar{\eta}_0 =$

$$= \frac{9}{10}(\bar{y}_0 - \bar{x}_0) = -\frac{9}{10}\bar{x}_0 + \frac{9}{10}\bar{y}_0.$$

Άρα η ολική επιτάχυνση είναι:

$$\bar{\alpha}_{ολ} = \bar{\alpha}_{επιτρ.} + \bar{\alpha}_{κεντρ.} = \left(\sqrt{2} - \frac{9}{10}\right)\bar{x}_0 + \left(\sqrt{2} + \frac{9}{10}\right)\bar{y}_0$$

και το μέτρο της: $|\bar{\alpha}_{ολ}| = \sqrt{\frac{281}{50}}$ (m/s^2)

Ασκηση φυλ. 41

41. Σωματίδιο (υλικό σημείο) κινείται επιταχυνόμενο σε κυκλική τροχιά ακτίνας, R, με σταθερή επιτρόχια επιτάχυνση. (i) Να βρεθεί ο χρόνος που απαιτείται ώστε η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων της ταχύτητας, $\vec{u}$, και της επιτάχυνσης, $\vec{a}$, να γίνει ίση με φ. (ii) Να βρεθεί το διάστημα, S, που διανύει το σωματίδιο στο χρονικό αυτό διάστημα.

i) Έχουμε ότι: $\vec{u}\cdot\vec{\alpha}_{ολ} = \bar{u}\cdot(\bar{\alpha}_{επιτρ}+\bar{\alpha}_{κεντρ}) =$

$= \bar{u}\cdot\bar{\alpha}_{επ} + \bar{u}\cdot\vec{\alpha}_{κεντρ} =$ (αφού $\vec{u} \perp \bar{\alpha}_{κεντρ}$ τότε $\bar{u}\cdot\bar{\alpha}_{κεντρ}=0$) $= \vec{u}\cdot\vec{\alpha}_{επιτρ} = 0$

δηλαδή $\bar{u}\cdot\bar{\alpha}_{ολ} = \bar{u}\cdot\vec{\alpha}_{επιτρ} \Rightarrow |\bar{u}||\bar{\alpha}_{ολ}|\cos\phi = |\bar{u}||\bar{\alpha}_{επιτρ}|\cos 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\bar{\alpha}_{επιτρ}| = |\bar{\alpha}_{ολ}|\cos\phi$ (1), όπου ϕ η γωνία μεταξύ των $\vec{u}$ κ' $\bar{\alpha}_{ολ}$.

Επίσης, $|\bar{\alpha}_{ολ}| = \sqrt{|\bar{\alpha}_{κεντρ}|^2 + |\bar{\alpha}_{επιτρ}|^2} = \sqrt{\frac{|\bar{u}|^4}{R^2} + |\bar{\alpha}_{επιτρ}|^2}$ (2)

$\bar{\alpha}_{επιτρ} = |\dot{\vec{u}}|\bar{\varepsilon}_0 = \frac{d}{dt}|\bar{u}|\bar{\varepsilon}_0 \Rightarrow |\bar{\alpha}_{επιτρ}| = \frac{d}{dt}|\bar{u}| \Rightarrow d|\bar{u}| = |\bar{\alpha}_{επιτρ}|dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^{|\bar{u}|} d|\bar{u}| = \int_0^t |\bar{\alpha}_{επιτρ}|dt = |\bar{\alpha}_{επιτρ}|\int_0^t dt = |\bar{\alpha}_{επιτρ}|t \Rightarrow$

$\Rightarrow |\bar{u}| = |\bar{\alpha}_{επιτρ}|t$ (3)

από (2) $\overset{(3)}{\Rightarrow} |\bar{\alpha}_{ολ}| = \sqrt{\frac{|\bar{\alpha}_{επιτρ}|^4 t^4}{R^2} + |\bar{\alpha}_{επιτρ}|^2} \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow |\bar{\alpha}_{επιτρ}| = \sqrt{\frac{|\bar{\alpha}_{επιτρ}|^4 t^4}{R^2} + |\bar{\alpha}_{επιτρ}|^2}\cos\phi \Rightarrow |\bar{\alpha}_{επιτρ}|^2 = \left(\frac{|\bar{\alpha}_{επιτρ}|^4 t^4}{R^2} +\right.$

$\left.|\bar{\alpha}_{επιτρ}|^2\right)\cos^2\phi \Rightarrow \frac{|\bar{\alpha}_{επιτρ}|^2 t^4}{R^2} = \frac{1}{\cos^2\phi} - 1 = \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} = \tan^2\phi \Rightarrow$

$\Rightarrow t^4 = \frac{R^2\tan^2\phi}{|\bar{\alpha}_{επιτρ}|^2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{R\tan\phi}{|\bar{\alpha}_{επιτρ}|}}$ (4)

ii) Η επιτρόχιος επιτάχυνση είναι σταθερή, οπότε:

$\frac{d}{dt}|\bar{u}| = |\bar{\alpha}_{επιτρ}| = $ σταθερά $\Rightarrow d|\bar{u}| = |\bar{\alpha}_{επιτρ}|dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^{|\bar{u}|} d|\bar{u}| = \int_0^t |\bar{\alpha}_{επιτρ}|dt = |\bar{\alpha}_{επιτρ}|t \Rightarrow |\bar{u}| = |\bar{\alpha}_{επιτρ}|t$

Οπότε έχουμε ότι:

$$\frac{dS}{dt} = |\bar{u}(t)| \Rightarrow dS = |\bar{u}(t)|dt \Rightarrow \int_0^S dS = \int_0^t |\bar{u}(t)|dt =$$

$$= \int_0^t |\bar{\alpha}_{επιτρ}|\, t\, dt = |\bar{\alpha}_{επιτρ}|\frac{t^2}{2} \quad \text{, οπότε: } S = |\bar{\alpha}_{επιτρ}|\frac{t^2}{2} \overset{(4)}{=}$$

$$= \frac{R\tan\phi}{2}$$

Άσκηση Φυλ. 42

42. Η ράβδος, OA του σχήματος (Σχήμα 17) περιστρέφεται στο οριζόντιο Oxy επίπεδο έτσι ώστε $\theta = t^3\ rad$. Συγχρόνως, το δακτυλίδι B ολισθαίνει πάνω στη ράβδο, OA, κινούμενο προς τα έξω με $r = 100t^2\ mm$. Να προσδιοριστεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του δακτυλιδιού όταν $t = 1\ s$.

Η τροχιά του υλικού σημείου είναι: $\begin{cases} r = 0.1t^2 \\ \theta = t^3 \end{cases}$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο παίρνουμε:

$$\begin{cases} \dot{r} = 0.2t \\ \dot{\theta} = 3t^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \ddot{r} = 0.2 \\ \ddot{\theta} = 6t \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι: $u_r = \dot{r} = 0.2t$

$$u_\theta = r\dot{\theta} = 0.1t^2\, 3t^2 = 0.3t^4$$

και $\alpha_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0.2 - 0.9t^6$

$$\alpha_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 1.8t^3$$

οπότε για $t = 1s$: $\vec{u} = 0.2\bar{r}_0 + 0.3\bar{\theta}_0$ κ' $\vec{\alpha} = -0.7\bar{r}_0 + 1.8\bar{\theta}_0$

Άσκηση φυλ. 43

43. Έχουμε σχοινί με σταθερό μήκος ($ACEDB$, Σχήμα 18) και τα σημεία C και D είναι σταθεροποιημένα. Αν το σημείο B του σχοινιού κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου $u_B = 6\ m/s$, να υπολογιστεί η ταχύτητα του σημείου A. Η ακτίνα των τροχαλιών θεωρείται αμελητέα.

Αφού το σχοινί έχει σταθερό μήκος τότε:

$$L = S_A + 3S_B \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0 = \frac{dS_A}{dt} + 3\frac{dS_B}{dt} \Rightarrow u_A + 3u_B = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_A = -3u_B = -3 \cdot 6 \Rightarrow u_A = -18\ (m/s)$$ (βλέπε προηγούμενη άσκηση)